www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail

ECOLE NATIONALE DES PONTS ET CHAUSSEES,
ECOLES NATIONALES SUPERIEURES DE L'AERONAUTIQUE ET DE L'ESPACE,
DE TECHNIQUES AVANCEES, DES TELECOMMUNICATIONS,
DES MINES DE PARIS, DES MINES DE SAINT-ETIENNE, DES MINES DE NANCY,
DES TELECOMMUNICATIONS DE BRETAGNE,
ECOLE POLYTECHNIQUE
(Option T.A.)

CONCOURS D'ADMISSION 1989

***

MATHEMATIQUES

2EME EPREUVE

OPTION T.A.

(Durée de l'épreuve : 4 heures)

***

Les candidats sont priés de mentionner de façon apparente sur la première page de la copie : MATHEMATIQUES II - T.A.

L'énoncé de cette épreuve, particulière aux candidats de l'option T.A., comporte 6 pages.

***

NOTATIONS ET OBJECTIF DU PROBLEME

On se propose de calculer explicitement les sommes des séries trigonométriques des types suivants :

$$(1) \qquad C(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n \cos nt}{n^2 + \alpha^2}$$

$$(2) \qquad S(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{b_n \sin nt}{n^2 + \alpha^2}$$

où α est un nombre réel positif donné, a_n et b_n étant les coefficients de Fourier de fonctions données φ et ψ respectivement paires et impaires.

Pour celà, dans la partie II, on prouve que les fonctions C et S sont solutions d'équations différentielles linéaires à coefficients constants de seconds membres φ et ψ respectivement et satisfont à des conditions aux limites sur $[0, \pi]$.

Dans la partie III, on calcule la somme de certaines séries du type C et S en résolvant ces équations sur des exemples correspondant à des fonctions φ et ψ étudiées dans la partie I.

PARTIE I

Développements en séries de Fourier

I - 1 Soit la fonction φ 2π - périodique, paire, définie sur

$[0, \pi]$ par $\varphi(t) = \frac{\pi}{2} - t$.

a) Tracer le graphe de la fonction φ et étudier la continuité et la dérivabilité de la fonction φ .

b) Calculer les coefficients de Fourier de la fonction φ .

c) Préciser quelle est, en tout point t de $[-\pi, +\pi]$, la somme du développement en série de Fourier de φ .

I - 2 Soit la fonction ψ, 2π - périodique impaire telle que, pour tout t appartenant à $[0, \pi[$, $\psi(t) = - t$.

a) Déterminer ψ et tracer son graphe. Etudier la continuité et la dérivabilité de ψ .

b) Calculer les coefficients de Fourier de la fonction ψ .

c) Préciser quelle est, en tout point t de $[-\pi, +\pi]$, la somme du développement en série de Fourier de ψ .

PARTIE II

Equations différentielles vérifiées par les fonctions C et S

Soient (a_n) et (b_n) des suites de nombres réels.

Les fonctions C et S sont définies respectivement par :

$$(1) \qquad C(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n \cos nt}{n^2 + \alpha^2} ,$$

$$(2) \qquad S(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{b_n \sin nt}{n^2 + \alpha^2} ,$$

lorsque ces séries convergent.

II - 1 Définition et continuité de S et C

On suppose que les suites (a_n) et (b_n) sont bornées.

a) Montrer que, pour tout nombre réel t, la série (1) converge et que sa somme C est une fonction 2π - périodique paire. Etudier de même la série (2) et la fonction S.

b) Etudier la convergence normale sur $\mathbb{R}$ des séries (1) et (2). En déduire que les fonctions C et S sont continues sur $\mathbb{R}$ et de valeur moyenne nulle sur $[0, \pi]$.

TOURNEZ S'IL VOUS PLAIT

II - 2 Dérivabilité de C et S

a) On suppose que les séries $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{|a_n|}{n}$ et $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{|b_n|}{n}$ convergent.

Prouver que les fonctions C et S sont de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et que leurs dérivées s'expriment par des séries que l'on précisera.

b) On suppose que les séries numériques $\sum_{n=1}^{+\infty} |a_n|$ et $\sum_{n=1}^{+\infty} |b_n|$ convergent.

Montrer que les fonctions C et S sont de classe C^2 sur $\mathbb{R}$.

II - 3 Equations différentielles satisfaites par C et S

Les fonctions φ et ψ sont données, 2π - périodiques, à valeurs réelles, continues sur $\mathbb{R}$, de classe C^1 par morceaux sur $\mathbb{R}$. On suppose que φ est paire de valeur moyenne nulle sur $[0, +\pi]$ et que ψ est impaire.
On écrit leurs développements en série de Fourier sous la forme :

$$\varphi(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos nt ,$$

$$\psi(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \sin nt .$$

A ces fonctions, on associe les fonctions C et S définies par les séries (1) et (2).

a) Prouver que C et S sont de classe C^2 sur $\mathbb{R}$.

b) Prouver que la fonction C est solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle :

$$- y'' + \alpha^2 y = \varphi$$

et satisfait aux conditions limites $y'(0) = y'(\pi) = 0$.

c) Prouver que la fonction S est solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle :

$$- y'' + \alpha^2 y = \psi$$

et satisfait aux conditions limites $y(0) = y(\pi) = 0$.

II - 4 Extension des résultats précédents

Soit ψ une fonction 2π - périodique impaire, continue sur $[0, \pi[$, admettant une limite à gauche au point π.

On note $(b_n)_{n\geq 1}$ la suite des coefficients de Fourier de ψ .

Enfin, on note χ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $\chi(t) = \int_0^t \psi(x)\, dx$.

a) Montrer que χ est 2π - périodique, paire, continue sur $\mathbb{R}$, de classe C^1 par morceaux sur $[-\pi, +\pi]$.

b) On pose $\varphi = \chi - a_0$ où a_0 est la valeur moyenne de χ sur $[-\pi, +\pi]$.

Calculer les coefficients de Fourier a_n de φ en fonction des coefficients b_n (n étant un entier supérieur ou égal à un).

c) En déduire le développement en série de Fourier de φ en utilisant ces coefficients b_n.

Que peut-on dire de la série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{|b_n|}{n}$?

d) On considère la fonction C définie sur $\mathbb{R}$ par

$$C(t) = - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{b_n \cos nt}{n(n^2 + \alpha^2)} .$$

Montrer que C est de classe C^2 sur $\mathbb{R}$, qu'elle est solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $- y'' + \alpha^2 y = \varphi$ et qu'elle est de classe C^3 sur $[0, \pi[$.

e) En déduire que la fonction S définie sur $\mathbb{R}$ par

$$S(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{b_n \sin nt}{n^2 + \alpha^2}$$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$, de classe C^2 sur $[0, \pi[$, qu'elle est solution sur cet intervalle $[0, \pi[$ de l'équation différentielle $- y'' + \alpha^2 y = \psi$ et qu'elle satisfait aux conditions limites $y(0) = 0$ et $\lim_{t \to \pi^-} y(t) = 0$.

TOURNEZ S'IL VOUS PLAIT

page 112 Concours commun MINES-PONTS-TELECOM-... 1989 2 option TA-Math 2

PARTIE III

Applications aux calculs de sommes de séries du type (1) ou (2)

III - 1 Exemple de calcul d'une série (1)

Soit φ la fonction définie dans la question I - 1 et C la fonction définie par la série (1) associée à cette fonction φ .

a) On suppose $\alpha > 0$.

Résoudre sur $[0, \pi]$ l'équation $-y'' + \alpha^2 y = \varphi$.

Déterminer l'unique solution f_α de cette équation telle que $f'_\alpha(0) = f'_\alpha(\pi) = 0$. Vérifier que f_α est de valeur moyenne nulle sur $[0, \pi]$.

En déduire la somme de la série

$$(3) \qquad \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{\cos[(2p+1)t]}{(2p+1)^2\left[(2p+1)^2 + \alpha^2\right]} \text{ , où } t \in [0, \pi] .$$

b) On suppose $\alpha = 0$.

Déterminer l'unique solution f_0 de $y'' = -\varphi$ telle que $f'_0(0) = f'_0(\pi) = 0$ et dont la valeur moyenne sur $[0, \pi]$ est nulle.

En déduire la somme de la série

$$\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{\cos[(2p+1)t]}{(2p+1)^4} \text{ , où } t \in [0, \pi] .$$

c) Retrouver le résultat de la question b) en utilisant un passage à la limite dans la relation établie dans la question a).

III - 2 Exemple de calcul d'une série (2)

Soit ψ la fonction définie dans la question I - 2 et S la fonction définie par la série (2) associée à cette fonction ψ .

a) on suppose $\alpha > 0$.

Résoudre sur $[0, \pi[$ l'équation différentielle $-y'' + \alpha^2 y = \psi$.

Déterminer l'unique solution g_α de cette équation telle que $g_\alpha(0) = 0$ et $\lim_{t \to \pi^-} g_\alpha(t) = 0$.

En déduire la somme de la série

$$(4) \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n \sin nt}{n(n^2 + \alpha^2)} \text{ , où } t \in [0, \pi] .$$

b) Cas où $\alpha = 0$.

Déterminer de même la somme de la série

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n \sin nt}{n^3} \text{ , où } t \in [0, \pi] .$$

III - 3 Applications aux calculs d'autres séries (1)

a) A partir de III - 1 a), déterminer la somme de la série (où α est un nombre strictement positif)

$$(5) \qquad \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{\cos[(2p+1)t]}{(2p+1)^2 + \alpha^2} \text{ , où } t \in [0, \pi] .$$

b) De même à partir de III - 2 a), déterminer la somme de la série (où α est un nombre strictement positif)

$$(6) \qquad \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n \cos nt}{n^2 + \alpha^2} \text{ , où } t \in [0, \pi] .$$

FIN DU PROBLEME

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail